

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория групп, колец и полей
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Анализ данных в экономике Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.03.2023

Аннотация

Курс «Теория колец и полей» является продолжением алгебраической линейки курсов в первых трёх семестрах. Курс в основном посвящён различным применениям теории колец и полей к классическим задачам математики: великой теореме Ферма, представлениям чисел в виде суммы двух квадратов, основной теореме алгебры, построениям при помощи циркуля и линейки, разрешимости в радикалах. Кроме того, рассматриваются основы алгебраической геометрии, теория конечных полей и нормированные поля.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение основных современных методов теории колец и полей.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории колец и полей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории колец и полей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории колец и полей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории теории колец и полей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории колец и полей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории колец и полей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории колец и полей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Кольцо	2	2		5
2	Евклидовы кольца	2	2		5
3	Подкольца и идеалы	2	2		5
4	Великая теорема Ферма при $n = 3$	2	2		5
5	Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом	4	4		5
6	Нётеровы кольца	2	2		10
7	Расширение поля	4	4		10
8	Алгебраические расширения полей	4	4		10
9	Сепарабельные расширения полей	4	4		10
10	Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел	4	4		10
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Кольцо

Определения и свойства делимости

2. Евклидовы кольца

Разложение на простые в евклидовых кольцах

3. Подкольца и идеалы

Подкольцо Идеал. Кольцо главных идеалов. Целые гауссовы числа и числа Эйзенштейна. Контрпримеры. Максимальные и простые идеалы.

4. Великая теорема Ферма при $n = 3$

Теорема о соответствии между подгруппами и промежуточными полями

5. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом

Поле частных. Факториальность $\mathbb{Z}[x]$. Основная теорема.

6. Нётеровы кольца

Нётеровы кольца

7. Расширение поля

Характеристика поля. Степень расширения поля.

8. Алгебраические расширения полей

Алгебраические элементы и расширения. Алгебраически замкнутое поле.

9. Сепарабельные расширения полей

Теорема о примитивном элементе. Группа Галуа.

10. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Конечные поля. Нормирования. Поле p -адических чисел.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория групп, Электронная версия печатной публикации / А. Г. Курош. — Москва, Физматлит, 2011
2. Теория колец [Текст] = The theory of rings / Н. Джекобсон, -М., Гос. изд-во ин. лит., 1947

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Анализ данных в экономике
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория групп, колец и полей» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории теории колец и полей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории колец и полей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории колец и полей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории колец и полей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень типовых задач контрольной работы, вопросы для текущего контроля и итоговой аттестации приведены в отдельных файлах. Приложение 1

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Представлены в прикрепленном файле.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Везде, где не сказано иного, рассматривается расширение $K \supset F$, а $\alpha \in K$ — алгебраический над K элемент.

Через ξ_n обозначим примитивный корень n -ой степени из 1.

Типовые задачи

Задача 1. Найдите степень расширения $\mathbb{Q}(\alpha)$ (например, $\alpha = \sqrt{2}, \sqrt{2}i, \sqrt[3]{2}, \xi_5, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \xi_8$).

Задача 2. Найдите минимальные многочлены для α над F (например, $\sqrt{2}$ над \mathbb{Q} ; $\sqrt[3]{2}$ над \mathbb{Q} ; $\sqrt[7]{5}$ над \mathbb{Q} ; $2 - 3i$ над \mathbb{R} ; $2 - 3i$ над \mathbb{C} ; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над \mathbb{Q} ; $1 + \sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$).

Задача 3. Найдите степень поля разложения для многочленов (например, $x^2 - 2, x^3 - 2, x^4 - 2, x^5 - 2$).

Задача 4. Найдите примитивный элемент расширения (например $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$).

Задача 5. Является ли данное расширение нормальным?

Задача 6. Найдите группу Галуа данного расширения.

Задача 7. Для конечного поля: построение, нахождение порождающего элемента поля.

Обычные задачи

Задача 8. Многочлен $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ (p — простое число) неприводим над \mathbb{Q} .

Задача 9. Многочлен $x^n - p$ (p — простое число) неприводим над \mathbb{Q} .

Задача 10. Любое конечное поле имеет положительную характеристику.

Задача 11. (Нетривиальный) гомоморфизм полей $\varphi : F \rightarrow K$ является инъективным.

Задача 12. У поля F конечной характеристики $\text{char } F$ — простое число.

Задача 13. Любое поле F нулевой характеристики содержит \mathbb{Q} в качестве подполя.

Задача 14. Если существует нетривиальный гомоморфизм полей $\varphi : F \rightarrow K$, то $\text{char } F = \text{char } K$.

Задача 15. Если $K \supset F$ — расширение полей, то K является линейным пространством над F .

Задача 16. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n , и $K = F[x]/(f(x))$. Тогда многочлен $f(x)$ имеет корень в K .

Задача 17. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n , и $K = F[x]/(f(x))$. Чему равна степень $[K : F]$ этого расширения?

Задача 18. Верно ли, что для любого многочлена $g(x) \in F[x]$ найдётся расширение поля F , в котором $g(x)$ имеет корень?

Задача 19. Верно ли, что любое конечное расширение поля является алгебраическим?

Задача 20. Верно ли, что у любого поля существует не алгебраическое расширение?

Задача 21. Если α является корнем неприводимого многочлена $f(x)$, то $f(x)$ порождает идеал $m_{\alpha, F} = \{g(x) \in F[x] \mid g(\alpha) = 0\}$.

Задача 22. Пусть $f(x), g(x)$ — неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1, у которых α является корнем. Тогда $f(x) = g(x)$.

Задача 23. Верно ли, что если у K нет нетривиальных алгебраических расширений, то полем разложения любого многочлена $f \in K[x]$ является K ? (Если верно, то докажите это, если неверно, приведите контрпример)

Задача 24. Верно ли, что если полем разложения любого многочлена $f \in K[x]$ является K , то у K нет нетривиальных алгебраических расширений?

Задача 25. Верно ли, что если любой многочлен степени ≥ 1 из $K[x]$ имеет корень в поле K , то у K нет нетривиальных алгебраических расширений?

Задача 26. Верно ли, что если у K нет нетривиальных алгебраических расширений, то любой многочлен степени ≥ 1 из $K[x]$ имеет корень в поле K ?

Задача 27. Верно ли, что над алгебраически замкнутым полем K нет нетривиальных расширений?

Задача 28. Пусть α, β — корни неприводимого многочлена $f(x) \in F[x]$. Тогда поля $F(\alpha)$ и $F(\beta)$ изоморфны.

Задача 29. Назовём число $x \in \mathbb{C}$ алгебраическим, если x алгебраично над \mathbb{Q} . Множество всех алгебраических чисел обозначим через $\overline{\mathbb{Q}}$. Докажите, что $\overline{\mathbb{Q}}$ является полем.

Задача 30. Докажите, что для алгебраических над F элементов α и β следующие условия эквивалентны: $m_{\alpha, F} = m_{\beta, F}$ и $m_{\alpha, F}(\beta) = 0$.

Задача 31. Пусть $\varphi : F \rightarrow F$ — автоморфизм поля F (изоморфизм поля на себя).

а) Пусть $\text{char } F = 0$. Верно ли, что φ сохраняет \mathbb{Q} ? (то есть при $q \in \mathbb{Q}$ выполнено равенство $\varphi(q) = q$).

б) Пусть $\text{char } F = p$. Верно ли, что φ сохраняет \mathbb{Z}_p ?

Задача 32. Пусть $F \subset K$ — расширение полей, $H \subset \text{Aut}_F(K)$ — подгруппа. Тогда $K^H = \{x \in K \mid \forall h \in H \ h(x) = x\}$ является полем, причём $K \supset K^H \supset F$.

Задача 33. Пусть $K \supset L \supset F$ — башня расширений полей, $K \supset F$ — нормальное расширение. Тогда $K \supset L$ — нормальное расширение.

Задача 34. Докажите, что конечное поле характеристики p состоит из p^n элементов.

Задача 35. Существует единственное поле из p^n элементов.

Задача 36. Пусть $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ — многочлен, у которого производная равна 0. Тогда

а) $f \in \mathbb{Z}_p[x^p]$;

б) $f = g^p$ для некоторого $g \in \mathbb{Z}_p[x]$.

в) Пусть F — конечное поле. Для неприводимого многочлена $h \in F[x]$ в его поле разложения все корни различны.

Задача 37. Опишите все подполя поля а) \mathbb{F}_{32} ; б) \mathbb{F}_{81} ; в) $\mathbb{F}_{2^{30}}$.

Задача 38. Верно ли, что неприводимый многочлен над \mathbb{F}_p делит многочлен $x^{p^n} - x$ тогда и только тогда, когда его степень делит n ?

Во всех задачах, если не сказано иное, под K подразумевается коммутативное кольцо. Кроме того, будем считать, что $D = \mathbb{Z}[u]$, где $u = i$ или ω .

Типовые задачи

Задача 1. Уметь отвечать на вопросы является ли данное кольцо K коммутативным? ассоциативным? кольцом с единицей? областью целостности? полем? евклидово кольцо? Какие в K есть обратимые элементы? неразложимые? простые?

Задача 2. Для заданного числа $z = a + bu \in D$ с $N(z) \leq 100$ найти разложение z на неразложимые.

Задача 3. Для заданных элементов z_1, z_2 найти порождающий элемент идеала (z_1, z_2) .

Задача 4. Найти факторкольцо $K/(x_1, x_2, x_3)$.

Задачи с семинаров

Задача 5. Для любых $a, b, c \in K$ $a0 = 0a = 0$.

Задача 6. В кольце не может быть двух различных единиц.

Задача 7. Пусть кольцо с единицей содержит не меньше двух элементов. Тогда $1 \neq 0$.

Задача 8. В коммутативном кольце элемент не может иметь двух различных обратных элементов.

Задача 9. Обратимый элемент кольца не может быть делителем нуля.

Задача 10. Если K — кольцо без делителей нуля, то возможно сокращение: если $ac = bc$ (или $ca = cb$) и $c \neq 0$, то $a = b$.

Задача 11. В конечном коммутативном кольце если элемент не является делителем нуля, то он обратим.

Задача 12. Конечная область целостности — поле.

Задача 13. а) Докажите, что для элементов x, y области целостности K следующие условия равносильны: (1) $x \sim y$; (2) $x \mid y$ и $y \mid x$; (3) множество делителей x и множество делителей y равны. б) Отношение \sim является отношением эквивалентности.

Задача 14. Простой элемент области целостности является неразложимым.

Задача 15. Для любого числа $u \in \mathbb{C}$ определим множество $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1u + \dots + a_nu^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$.

а) Докажите, что $\mathbb{Z}[u]$ является областью целостности. б) При каких $u \in \mathbb{C}$ данное $\mathbb{Z}[u]$ «конечномерно над \mathbb{Z} », то есть найдётся такое N , что $\mathbb{Z}[u] = \{a_0 + a_1u + \dots + a_Nu^N \mid a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{Z}\}$?

Задача 16. Множество K^* обратимых элементов кольца K является группой по умножению. Она называется *мультипликативной группой* или *группой обратимых элементов* кольца K .

Задача 17. K — евклидово кольцо. Верно ли, что если для $a, b \neq 0$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$, то b обратим?

Задача 18. K — евклидово кольцо. Верно ли, что для $a \neq 0, b \in K^*$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$?

Задача 19. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[i]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Rightarrow z$ — обратим.

Задача 20. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Rightarrow z$ — обратим.

Задача 21. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[i]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Leftarrow z$ — обратим.

Задача 22. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Leftarrow z$ — обратим.

Задача 23. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $z = a + bu \in D$ делится на k тогда и только тогда, когда a и b делятся на k .

Задача 24. Если $z \in D, z \mid x$, и $N(z) = N(x)$, то $z \sim x$.

Задача 25. а) Если z — неразложимый элемент D , то существует такое простое целое число p , что $N(z) = p$ или $N(z) = p^2$.

б) Если z — неразложимый элемент D и $N(z) = p^2$, то z ассоциировано с p .

в) Если $N(z) = p$, то z — неразложимый элемент D .

г) Пусть p — простое целое число. Тогда есть два варианта: либо p неразложимо в D , либо $p = z\bar{z}$, где z — неразложимо в D . Таким образом описываются все неразложимые элементы D .

Задача 26. (*Простые гауссовы числа*) Пусть p — простое целое число.

а) Если $p = 4k + 3$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

б) Если $p = 4k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[i]$.

в) Если $p = 4k + 1$, то $p = z\bar{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

г) Неразложимые элементы $\mathbb{Z}[i]$, не описанные в предыдущих пунктах — $1 \pm i$.

Задача 27. (*Простые числа Эйзенштейна*) Пусть p — простое целое число.

а) Если $p = 3k + 2$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

б) Если $p = 3k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

в) Если $p = 3k + 1$, то $p = z\bar{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

Задача 28. Пусть $I \subset K$ является подмножеством, для которого выполнено следующее условие: для любых $a \in K, x \in I, y \in I$ верно, что $x + y \in I, ax \in I$. Верно ли что это условие равносильно тому, что I — идеал?

Задача 29. а) Для произвольных элементов x_1, \dots, x_n кольца K множество

$$(x_1, \dots, x_n) = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}$$

является идеалом. Он называется *идеалом, порождённым элементами* x_1, \dots, x_n .

б) Докажите, что (x_1, \dots, x_n) — минимальный по включению идеал, содержащий элементы x_1, \dots, x_n .

Задача 30. Пусть $I \subset K$ — идеал. Всегда ли *радикал* $\sqrt{I} = \{a \in K \mid \exists m \in \mathbb{N} : a^m \in I\}$ идеала I является идеалом?

Задача 31. Всегда ли множество делителей нуля (с добавлением 0) является идеалом?

Задача 32. Пусть $N(K)$ — множество *нильпотентных элементов* кольца K , то есть элементов, некоторая степень которых равна 0
$$N(K) = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}.$$

Всегда ли $N(K)$ является идеалом?

Задача 33. Пусть $K \neq 0$. Докажите, что K является полем тогда и только тогда, когда K не содержит нетривиальных идеалов.

Утверждения с лекций.

Задача 34. а) Докажите, что $a \mid b$ тогда и только тогда, когда $(b) \subset (a)$. б) Докажите, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $(a) = (b)$.

Задача 35. Пусть $I, J \subset K$ — идеалы. Докажите, что *сумма* $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ и *пересечение* $I \cap J$ идеалов являются идеалами.

Задача 36. Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

Задача 37. Докажите, что в кольце главных идеалов любой неразложимый элемент является простым.

Задача 38. Докажите, что в кольце главных идеалов любая возрастающая цепочка идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset (a_3) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$$

стабилизируется, то есть найдётся такое k , что $(a_k) = (a_{k+1}) = \dots$

Задача 39. Пусть $K = \mathbb{Z}[i]$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Докажите, что x и y взаимно-просты в \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда x и y взаимно просты в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 40. Пусть $K = \mathbb{Z}[i]$, $(x, y) = 1$. Какие значения может принимать $(x + yi, x - yi)$?

Задача 41. Пусть $K = \mathbb{Z}[i]$, $(x, y) = (y, z) = (x, z) = 1$, z — нечётно, выполнено равенство $z^2 = x^2 + y^2$. Тогда $z = m^2 + n^2$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 42. Пусть $K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\lambda = 1 - \omega$. Докажите, что если $x \in K$ не делится на λ , то $x \equiv r \pmod{3}$, где $r \in K^*$.

Задача 43. Пусть $K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\lambda = 1 - \omega$. Докажите, что если $x \in K$ не делится на λ , то $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

Задача 44. Пусть $K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\lambda = 1 - \omega$. Пусть $(x, y) = 1$. Докажите, что $(x + y, x + \omega y) = (x + y, x + \omega^2 y) = (x + \omega y, x + \omega^2 y) = 1$ или λ .

Задача 45. Пусть $K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\lambda = 1 - \omega$. Пусть $(x, y) = 1$. Докажите, что $(x + y, x + \omega y) = 1$ или λ .

Задача 46. Пусть $K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\lambda = 1 - \omega$. Пусть существует нетривиальное решение уравнения $x^3 + y^3 = z^3$. Докажите, что $x y z$ делится на λ .

Во всех задачах, если не сказано иное, под K подразумевается коммутативное кольцо. Кроме того, будем считать, что $D = \mathbb{Z}[u]$, где $u = i$ или ω .

Типовые задачи

Задача 1. Уметь отвечать на вопросы является ли данное кольцо K коммутативным? ассоциативным? кольцом с единицей? областью целостности? полем? евклидово кольцо? Какие в K есть обратимые элементы? неразложимые? простые?

Задача 2. Для заданного числа $z = a + bu \in D$ с $N(z) \leq 100$ найти разложение z на неразложимые.

Задача 3. Для заданных элементов z_1, z_2 найти порождающий элемент идеала (z_1, z_2)

Обычные задачи

Задача 4. Для любых $a, b, c \in K$ $a0 = 0a = 0$.

Задача 5. В кольце не может быть двух различных единиц.

Задача 6. Пусть кольцо с единицей содержит не меньше двух элементов. Тогда $1 \neq 0$.

Задача 7. В коммутативном кольце элемент не может иметь двух различных обратных элементов.

Задача 8. Обратимый элемент кольца не может быть делителем нуля.

Задача 9. Если K — кольцо без делителей нуля, то возможно сокращение: если $ac = bc$ (или $ca = cb$) и $c \neq 0$, то $a = b$.

Задача 10. В конечном коммутативном кольце если элемент не является делителем нуля, то он обратим.

Задача 11. Конечная область целостности — поле.

Задача 12. а) Докажите, что для элементов x, y области целостности K следующие условия равносильны: (1) $x \sim y$; (2) $x \mid y$ и $y \mid x$; (3) множество делителей x и множество делителей y равны. б) Отношение \sim является отношением эквивалентности.

Задача 13. Простой элемент области целостности является неразложимым.

Задача 14. Для любого числа $u \in \mathbb{C}$ определим множество $\mathbb{Z}[u] = \cup_{n=0}^{\infty} \{a_0 + a_1u + \dots + a_nu^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$.

а) Докажите, что $\mathbb{Z}[u]$ является областью целостности. б) При каких $u \in \mathbb{C}$ данное $\mathbb{Z}[u]$ «конечномерно над \mathbb{Z} », то есть найдётся такое N , что $\mathbb{Z}[u] = \{a_0 + a_1u + \dots + a_Nu^N \mid a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{Z}\}$?

Задача 15. Множество K^* обратимых элементов кольца K является группой по умножению. Она называется *мультипликативной группой* или *группой обратимых элементов* кольца K .

Задача 16. K — евклидово кольцо. Верно ли, что если для $a, b \neq 0$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$, то b обратим?

Задача 17. K — евклидово кольцо. Верно ли, что для $a \neq 0, b \in K^*$ выполнено равенство $N(ab) = N(a)$?

Задача 18. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[i]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Rightarrow z$ — обратим.

Задача 19. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Rightarrow z$ — обратим.

Задача 20. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[i]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Leftarrow z$ — обратим.

Задача 21. Докажите, что для $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ выполнено утверждение $N(z) = 1 \Leftarrow z$ — обратим.

Задача 22. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $z = a + bu \in D$ делится на k тогда и только тогда, когда a и b делятся на k .

Задача 23. Если $z \in D, z \mid x$, и $N(z) = N(x)$, то $z \sim x$.

Задача 24. а) Если z — неразложимый элемент D , то существует такое простое целое число p , что $N(z) = p$ или $N(z) = p^2$.

б) Если z — неразложимый элемент D и $N(z) = p^2$, то z ассоциировано с p .

в) Если $N(z) = p$, то z — неразложимый элемент D .

г) Пусть p — простое целое число. Тогда есть два варианта: либо p неразложимо в D , либо $p = z\bar{z}$, где z — неразложимо в D . Таким образом описываются все неразложимые элементы D .

Задача 25. (*Простые гауссовы числа*) Пусть p — простое целое число.

а) Если $p = 4k + 3$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

б) Если $p = 4k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[i]$.

в) Если $p = 4k + 1$, то $p = z\bar{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$.

г) Неразложимые элементы $\mathbb{Z}[i]$, не описанные в предыдущих пунктах — $1 \pm i$.

Задача 26. (*Простые числа Эйзенштейна*) Пусть p — простое целое число.

а) Если $p = 3k + 2$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

б) Если $p = 3k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

в) Если $p = 3k + 1$, то $p = z\bar{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

Задача 27. Пусть $I \subset K$ является подмножеством, для которого выполнено следующее условие: для любых $a \in K, x \in I, y \in I$ верно, что $x + y \in I, ax \in I$. Верно ли что это условие равносильно тому, что I — идеал?

Задача 28. а) Для произвольных элементов x_1, \dots, x_n кольца K множество

$$(x_1, \dots, x_n) = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}$$

является идеалом. Он называется *идеалом, порождённым элементами* x_1, \dots, x_n .

б) Докажите, что (x_1, \dots, x_n) — минимальный по включению идеал, содержащий элементы x_1, \dots, x_n .

Задача 29. а) Докажите, что $a \mid b$ тогда и только тогда, когда $(b) \subset (a)$. б) Докажите, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $(a) = (b)$.

Задача 30. Пусть $I, J \subset K$ — идеалы. Докажите, что *сумма* $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ и *пересечение* $I \cap J$ идеалов являются идеалами.

Задача 31. Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

Задача 32. Докажите, что в кольце главных идеалов любой неразложимый элемент является простым.

Задача 33. Докажите, что в кольце главных идеалов любая возрастающая цепочка идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset (a_3) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$$

стабилизируется, то есть найдётся такое k , что $(a_k) = (a_{k+1}) = \dots$